Аппроксимации Паде решений задач Коши

Ткаченко И.Г., *доц.*; Балабанова В.В., *студ.*
Запорожский национальный университет, г. Запорожье

Рассматривается задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

$$L(x, y, y') = 0, \quad y(0) = y_0 \neq 0\,. \tag{1}$$

Согласно идее Ж.Л. Лагранжа, на первом этапе решение ищется в виде

$$y(x) = y_0/[1+ y_1(x)]. \tag{2}$$

После подстановки (2) в (1) получается новое уравнение относительно функции $y_1(x)$, решение которого ищется в виде

$$y_1(x) = c_1 x^{\alpha_1} / [1 + y_2(x)]. \tag{3}$$

Константы c_1 и α_1 определяются из условия, чтобы левая часть уравнения была бесконечно малой возможно более высокого порядка при $x \to 0$ с учетом того, что $y_2(0) = 0$. Уравнение для функции $y_2(x)$ решается подстановкой, аналогичной (2) и т.д.

На каждом из этапов, если положить, что $y_i(x) \equiv 0$, то для искомой функции получается функциональная цепная дробь, которая, после элементарных преобразований, совпадает с аппроксимацией Паде искомой функции.

Этот факт иллюстрируется на примерах. Так для задачи Коши

$$y' = 2y, y(0) = 1 \tag{4}$$

получаются следующие приближения 1, $(1 - 2x)^{-1}$, $(1 + x)(1 - x)^{-1}$, $(3 + 2x)(3 - 4x + 2x^2)$, которые есть аппроксимациями Паде [1] соответствующей степени точного решения задачи (1).

1. Дж. Бейкер, П. Грейвс-Моррис, *Аппроксимации Паде* (М.: Мир: 1996).